# Schulze-Methode - ein Beispiel für eine gerechte Wahl?

Stelle dir folgende Situation vor: In einer Klasse, die aus sieben Schülen besteht, wird eine Klassensprecherwahl durchgeführt, bei der es drei Kandidaten (Anna, Tim und Jens) gibt. Dabei soll jeder Schüler auf einen Zettel schreiben, welcher Kandidat für ihn persönlich die Nummer eins ist, wer an zweiter Stelle und wer an dritter Stelle steht. Die sieben Stimmzettel sehen folgendermaßen aus:

| Stimmzettelnr. | 1. | 2. | 3. |
|---:|---|---|---|
| 1 | Anna | Tim | Jens |
| 2 | Anna | Jens | Tim |
| 3 | Anna | Jens | Tim |
| 4 | Tim | Anna | Jens |
| 5 | Tim | Jens | Anna |
| 6 | Jens | Tim | Anna |
| 7 | Jens | Tim | Anna |

Auf den ersten Blick sieht es so aus, als sei Anna die Siegerin. Bei näherem Hinschauen erkennt man jedoch, dass Tim auf den Stimmzetteln vier Mal vor Anna steht, d.h. die Mehrheit der Schüler zieht Tim Anna vor. Die Frage ist nun, was ist gerecht? Diesem Problem begegnet man bei allen möglichen Formen von Wahlen bzw. Abstimmungen.
Markus Schulze hat eine Methode (Schulze-Methode) entwickelt, die versucht, auf gerechte Weise einen einzigen Gewinner bei Abstimmungen zu ermitteln.

**Definition der Schulze-Methode:** Jeder Wähler erhält eine komplette Liste aller Kandidaten und nummeriert diese seinen Präferenzen entsprechend durch. Hierbei darf er dieselbe Präferenz an mehrere Kandidaten vergeben. Er darf auch Kandidaten weglassen. Wenn ein Wähler Kandidaten weglässt, so wird das so interpretiert, als ob dieser Wähler
(1) all diejenigen Kandidaten, an die er eine Präferenz vergeben hat, all denjenigen Kandidaten, die er weggelassen hat, strikt vorzieht und
(2) unter den weggelassenen Kandidaten keinen Unterschied macht.

Wie geht man vor? Wir nehmen ein Beispiel zu Hilfe:
Es stehen 5 Kandidaten $A$, $B$, $C$, $D$ und $E$ zur Wahl und es gibt 45 Wähler.

| Reihenfolge der Kandidaten auf einem Stimmzettel | Anzahl solcher Stimmzettel |
|:---:|:---:|
| $ACBED$ | 5 |
| $ADECB$ | 5 |
| $BEDAC$ | 8 |
| $CABED$ | 3 |
| $CAEBD$ | 7 |
| $CBADE$ | 2 |
| $DCEBA$ | 7 |
| $EBADC$ | 8 |

Sei $d[A,B]$ die Anzahl der Wähler, die Kandidat $A$ dem Kandidaten $B$ vorzieht.
Man stellt nun in einer Tabelle alle möglichen Verhältnisse dar:

| | $d[*,A]$ | $d[*,B]$ | $d[*,C]$ | $d[*,D]$ | $d[*,E]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $d[A,*]$ | | 20 | 26 | 30 | 22 |
| $d[B,*]$ | 25 | | 16 | 33 | 18 |
| $d[C,*]$ | 19 | 29 | | 17 | 24 |
| $d[D,*]$ | 15 | 12 | 28 | | 14 |
| $d[E,*]$ | 23 | 27 | 21 | 31 | |

Aus der Tabelle ist nun ersichtlich, dass beispielsweise Kandidat $A$ dem Kandidaten $C$ 26 Mal vorgezogen wird. Dieser wiederum wird dem Kandidaten $B$ 29 Mal vorgezogen. Wir schreiben $A$-(26)-$C$-(29)-$B$ und nennen dies einen Pfad von $A$ zu $B$. Dies ist nur einer von mehreren verschiedenen Pfaden um von $A$ nach $B$ zu gelangen. Ein Pfad von Kandidat $X$ zu Kandidat $Y$ ist also eine geordnete Menge von Kandidaten $K_1, ..., K_n$. Dieser Pfad wird Kette genannt, wenn er folgende Eigenschaften erfüllt:

a) $K_1$ ist identisch mit $X$.
b) $K_n$ ist identisch mit $Y$.
c) Für $i = 1, ..., (n-1)$ gilt $d[K_i, K_{i+1}] > d[K_{i+1}, K_i]$.
(D.h. es muss mehr Wähler geben, die $K_i$ dem Kandidaten $K_{i+1}$ vorziehen, als Wähler, die $K_{i+1}$ dem Kandidaten $K_i$ vorziehen.)

Die Stärke einer Kette $K_1, ..., K_n$ ist:

$$\min\{d[K_i, K_{i+1}]\}$$

In unserem Beispiel hat die Kette dann also die Stärke 26.

Um bei der Schulze-Methode einen Gewinner ermittlen zu können, ist immer die Kette von einem zum anderen Kandidaten relevant, die die größte Stärke hat. All diese stärksten Ketten werden in folgender Tabelle aufgelistet:

| | ... *zu A* | ... *zu B* | ... *zu C* | ... *zu D* | ... *zu E* |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | | $A$-(30)-$D$-(28)-$C$-(29)-$B$ | $A$-(30)-$D$-(28)-$C$ | $A$-(30)-$D$ | $A$-(30)-$D$-(28)-$C$-(24)-$E$ |
| $B$ | $B$-(25)-$A$ | | $B$-(33)-$D$-(28)-$C$ | $B$-(33)-$D$ | $B$-(33)-$D$-(28)-$C$-(24)-$E$ |
| $C$ | $C$-(29)-$B$-(25)-$A$ | $C$-(29)-$B$ | | $C$-(29)-$B$-(33)-$D$ | $C$-(24)-$E$ |
| $D$ | $D$-(28)-$C$-(29)-$B$-(25)-$A$ | $D$-(28)-$C$-(29)-$B$ | $D$-(28)-$C$ | | $D$-(28)-$C$-(24)-$E$ |
| $E$ | $E$-(31)-$D$-(28)-$C$-(29)-$B$-(25)-$A$ | $E$-(31)-$D$-(28)-$C$-(29)-$B$ | $E$-(31)-$D$-(28)-$C$ | $E$-(31)-$D$ | |

Die Stärke der stärksten Kette von $X$ nach $Y$ wird dann als $p[X,Y]$ notiert. Daraus ergibt sich folgende Tabelle:

| | $p[*,A]$ | $p[*,B]$ | $p[*,C]$ | $p[*,D]$ | $p[*,E]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p[A,*]$ | | 28 | 28 | 30 | 24 |
| $p[B,*]$ | 25 | | 28 | 33 | 24 |
| $p[C,*]$ | 25 | 29 | | 29 | 24 |
| $p[D,*]$ | 25 | 28 | 28 | | 24 |
| $p[E,*]$ | 25 | 28 | 28 | 31 | |

Sieger nach der Schulze-Methode ist Kandidat $E$, da gilt:

$$p[E,X] \geq p[X,E] \quad \text{für jeden Kandidaten } X \neq E.$$

Es gibt auch Fälle, bei denen es zwei oder mehrere potentielle Sieger $Y$ und $Z$ gibt (wie z.B. in unserem Eingangsbeispiel), d.h. es gilt:

$$p\,[Y,X] \geq p\,[X,Y] \quad \text{für jeden Kandidaten } X \neq Y$$
$$p\,[Z,X] \geq p\,[X,Z] \quad \text{für jeden Kandidaten } X \neq Z$$

In diesen Fällen benutzt Schulze eine sogenannte „Tie-Breaking-Anordnung der Kandidaten“. Dies ist ein Zufallsprinzip, das an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt wird.

Nun werden einige von mehreren Eigenschaften vorgestellt, die für eine gerechte Wahl notwendig sind:

(a) Pareto
Die Pareto-Eigenschaft bedeutet: Wenn kein Wähler Kandidat $X$ dem Kandidaten $Y$ vorzieht, und mindestens ein Wähler Kandidat $Y$ dem Kandidaten $X$ vorzieht, dann darf $X$ nicht gewinnen.

(b) Monotonie
Wenn einige Wähler Kandidat $X$ höher platzieren, ohne die Reihenfolge unter den anderen Kandidaten zu ändern, dann darf die Wahrscheinlichkeit, dass $X$ gewinnen wird, nicht sinken.

(c) Antisymmetrie
Sei $X$ der alleinige Sieger. Dreht man nun die Präferenzen jedes einzelnen Wählers um, dann darf $X$ nicht gewählt werden.

Diese drei Eigenschaften werden von der Schulze-Methode erfüllt. Die Frage ist nun, ob es auch eine Eigenschaft gibt, die wünschenswert wäre, von der Schulze-Methode aber nicht erfüllt wird. Auf diese Frage sollst du nun versuchen eine Antwort zu finden (Aufgabe 4).

## Online-Aufgaben

Hier sind ein paar kurze Aufgaben zur Lernkontrolle. Wer wissen will, ob seine Lösungen korrekt sind, kann diese auf der Seite http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs33/seite23.html eingegeben.

### Onlineaufgabe 1: Ketten

Es gibt 30 Wähler und fünf Kandidaten. Die Stimmzettel sehen folgendermaßen aus:

| Reihenfolge der Kandidaten auf einem Stimmzettel | Anzahl solcher Stimmzettel |
|---|---|
| $ABDEC$ | 3 |
| $ADEBC$ | 5 |
| $ADECB$ | 1 |
| $BADEC$ | 2 |
| $BDECA$ | 2 |
| $CABDE$ | 4 |
| $CBADE$ | 6 |
| $DBECA$ | 2 |
| $DECAB$ | 5 |

Welche der folgenden Wege/Pfade von einem zum anderen Kandidaten sind Ketten?

| | |
|---|---|
| A-(18)-B-(14)-C-(10)-D | keine Angabe ◯, Ja ◯, nein ◯ |
| C-(16)-B | keine Angabe ◯, Ja ◯, nein ◯ |
| E(11)-B-(12)-A-(11)-C | keine Angabe ◯, Ja ◯, nein ◯ |
| D(30)-E-(20)-C-(16)-B | keine Angabe ◯, Ja ◯, nein ◯ |

(4 Punkte)

### Onlineaufgabe 2: Wer gewinnt?

Es gibt neun Wähler und vier Kandidaten. Die Stimmzettel sehen wie folgt aus:

| Reihenfolge der Kandidaten auf einem Stimmzettel | Anzahl solcher Stimmzettel |
|---|---|
| $ABCD$ | 3 |
| $DABC$ | 2 |
| $DBCA$ | 2 |
| $CBDA$ | 2 |

Welche der Kandidaten sind potentielle Gewinner?

| | |
|---|---|
| Kandidat $A$: | keine Angabe ◯, Ja ◯, nein ◯ |
| Kandidat $B$: | keine Angabe ◯, Ja ◯, nein ◯ |
| Kandidat $C$: | keine Angabe ◯, Ja ◯, nein ◯ |
| Kandidat $D$: | keine Angabe ◯, Ja ◯, nein ◯ |

(4 Punkte)

**Onlineaufgabe 3: Monotonie und Pareto**

(a) Wenn einige Wähler bei einer Wahl Kandidat Ostmann höher platzieren und die Reihenfolgen unter den restlichen Kandidaten gleich bleiben, gilt dann, dass...

...Ostmann immer noch ein potentieller Gewinner ist, wenn er es vorher schon war?
keine Angabe ◯, Ja ◯, nein ◯

...dass jeder andere Kandidat, der kein potentieller Gewinner war, nun zum potentiellen Gewinner werden kann?
keine Angabe ◯, Ja ◯, nein ◯

(b) Es gibt 12 Wähler und sieben Kandidaten. Die Stimmzettel sehen folgendermaßen aus:

| Reihenfolge der Kandidaten auf einem Stimmzettel | Anzahl solcher Stimmzettel |
|---|---|
| $ABCDEFG$ | 1 |
| $GABCDEF$ | 1 |
| $CABDFEG$ | 1 |
| $FGCABDE$ | 1 |
| $BDACEFG$ | 8 |

Wäre es möglich, dass Kandidat $E$ gewinnt?
keine Angabe ◯, Ja ◯, nein ◯
Wäre es möglich, dass Kandidat $D$ gewinnt?
keine Angabe ◯, Ja ◯, nein ◯

(4 Punkte)

## Aufgaben

Diese Aufgaben sollen den Stoff vertiefen. Eure Lösungen könnt ihr (mit frankiertem Rückumschlag für Rücksendung der korrigierten Lösung) bis zum **12.01.2006** einsenden an: PD. Dr. Peter Lesky, Kennwort Schülerzirkel, IADM, FB Mathematik, Universität Stuttgart, Postfach 80 11 40, 70511 Stuttgart. Oder per E-Mail an `zirkel@mathematik.uni-stuttgart.de`
Für jede Aufgabe ist ein gesondertes DIN A4-Blatt mit Rand zu verwenden. Merke: *Zu jeder vollständigen Lösung gehört stets der Lösungsweg!*

### Aufgabe 1: Wer ist der Gewinner?

Es gibt 30 Wähler und vier Kandidaten. Die Stimmzettel sehen folgendermaßen aus:

| Reihenfolge der Kandidaten auf einem Stimmzettel | Anzahl solcher Stimmzettel |
|---|---|
| ACBD | 5 |
| ACDB | 2 |
| ADCB | 3 |
| BACD | 4 |
| CBDA | 3 |
| CDBA | 3 |
| DACB | 1 |
| DBAC | 5 |
| DCBA | 4 |

Ermittle den Gewinner/ die potentiellen Gewinner und gehe dabei vor wie oben (Arbeitsmaterial).

(6 Punkte)

### Aufgabe 2: Ketten

Schau dir nochmal das Beispiel mit den 45 Wählern und den 5 Kandidaten aus dem Arbeitsmaterial an. Schreibe nun alle möglichen Ketten und ihre Stärke auf (nicht nur die stärksten).

(5 Punkte)

### Aufgabe 3: Ein kleiner Beweis

Zeige, dass die Schulze-Methode die Eigenschaft der Antisymmetrie erfüllt.

(5 Punkte)

### Aufgabe 4: Gerechtigkeitsfrage

Nun bleibt die Frage, ob die Schulze-Methode in jedem Fall gerecht ist. Beantworte diese Frage anhand des Arbeitsmaterials und begründe deine Antwort.

(4 Punkte)